Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 3 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(1+1+1+1 Punkte)* Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gelten die *Anordnungsaxiome*:

(A1) Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Eigenschaften:
$x > 0$ (positiv) oder $x = 0$ (Null) oder $x < 0$ (negativ).

(A2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x + y > 0$.

(A3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Sind $x > 0$ und $y > 0$, so folgt $x \cdot y > 0$.

Weise nun folgende Ordnungseigenschaften in $\mathbb{R}$ nach (wobei jeweils $x, y, a \in \mathbb{R}$):

(a) Gilt $x < y$ und $a > 0$, so folgt $a \cdot x < a \cdot y$.

(b) Aus $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$ folgt $a \cdot x < b \cdot y$.

(c) Gilt $x < y$ und $a < 0$, so folgt $a \cdot x > a \cdot y$.

(d) Es gilt $1 > 0$.

Verwende hierzu jeweils *ausschließlich* die Ordnungsaxiome (A1)-(A3).

Lösung. (a): Die Definition von $x < y$ ist $y - x > 0$ und es gilt $a > 0$ nach Voraussetzung. Daher ist $ay - ax = a(y - x) > 0$ nach (A3).

(b): Falls entweder $x = 0$ oder $a = 0$ gilt, ist auch $ax = 0 < by$ nach (A3). Falls wiederum $x > 0$ und $a > 0$ gilt, dann wenden wir zuerst Aufgabenteil (a) auf $a > 0$ und $x < y$ an für $ax < ay$ und dann wenden wir (a) auf $a < b$ und $y > 0$ an für $ay < by$. Also gilt $ax < ay < by$ und aufgrund der Transitivität damit auch $ax < by$.

(c): Nach Voraussetzung gilt wieder $y - x > 0$ und $-a > 0$, also folgt aus (A3), dass $(-a)(y - x) > 0$, wobei $(-a)(y - x) = a(x - y) = ax - ay$.

(d): Wir zeigen, dass $x^2 = x \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ gilt. Daraus folgt (d) wegen $1 = 1 \cdot 1$. In der Tat folgt diese Behauptung für $x > 0$ direkt aus (A3) und für $x < 0$ wegen

$$x \cdot x = (-1)^2 (x \cdot x) = (-x) \cdot (-x) > 0$$

ebenfalls aus (A3).

■

Aufgabe 2: *(2 Punkte)* Bestimme die Menge aller Elemente $x \in \mathbb{R}$, für die die Ungleichungen

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad 2x \geq 6/5$$

gelten.

Lösung. Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu (und erfüllt für alle) $x \geq 3/5$, während wir für die erste Ungleichung zuerst $x+2 > 0$ annehmen. Dann ist $x > -2$ und es gilt

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x-3 < \frac{1}{3}(x+2) \quad \Longleftrightarrow \quad x < \frac{11}{5}.$$

Also lösen alle $x \in (-2, 11/5)$ die erste Ungleichung. Nun betrachten wir reelle Zahlen x mit $x+2 < 0$. Damit dreht sich das Vorzeichen nach Multiplikation um und wir finden

$$\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x-3 > \frac{1}{3}(x+2) \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{11}{5}.$$

Also müsste $x < -2$ und $x > \frac{11}{5}$ gelten und es gibt keine reellen Zahlen, die diese Anforderungen erfüllen. Da beide Ungleichungen gelten müssen, ist die Lösungsmenge also der Schnitt

$$(-2, 11/5) \cap [3/5, \infty) = [3/5, 11/5) \neq \emptyset.$$

■

Aufgabe 3: *(4 Punkte)* Zeige, dass die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

abzählbar ist. Konstruiere hierzu zuerst eine geeignete Anordnung der *positiven* Elemente in

$$\mathbb{Q}_+ := \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lösung. Zur Anordnung der Elemente in $\mathbb{Q}_+$ wenden wir die Diagonalisierung von Cantor[1] an. Dazu tragen wir die positiven rationalen Zahlen in eine *Matrix* ein, d.h. in ein Rechtecksschema mit Zeilen und Spalten. Für die Spalten der Matrix verwenden wir den Zählindex $n \in \mathbb{N}$ und für die Zeilen den Zählindex $m \in \mathbb{N}$. Dann tragen wir in das Matrix-Feld der n-ten Zeile und m-ten Spalte die (positive) rationale Zahl m/n ein. Der obere linke Teil dieser Matrix (mit jeweils unendlich abzählbar vielen Zeilen und Spalten) ist wie folgt.

[1] Georg Cantor (1845-1918), deutscher Mathematiker

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Nun zählen wir die Einträge in dieser Matrix nach dem *Cantorschen Diagonalverfahren* wie folgt ab. Dabei werden ungekürzte Brüche übersprungen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1}(1) & \to & \frac{1}{2}(2) & & \frac{1}{3}(5) & \to & \frac{1}{4}(6) & & \frac{1}{5}(11) & \to \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{2}{1}(3) & & \frac{2}{2}(\cdot) & & \frac{2}{3}(7) & & \frac{2}{4}(\cdot) & & \frac{2}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
\frac{3}{1}(4) & & \frac{3}{2}(8) & & \frac{3}{3}(\cdot) & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
\frac{4}{1}(9) & & \frac{4}{2}(\cdot) & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
\frac{5}{1}(10) & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Die Abzählung der positiven rationalen Zahlen beginnt somit wie folgt.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 4 & 5 & \frac{1}{5} & \cdots
\end{array}$$

Fazit: Wir haben erklärt, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}_+$ der positiven rationalen Zalhen *gleichmächtig* sind. Genauso sind $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{Q}_-$ der negativen rationalen Zalhen gleichmächtig. Insbesondere sind $\mathbb{Q}_+$ und $\mathbb{Q}_-$ jeweils abzählbar, so ebenso deren Vereinigung $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$, und schließlich auch die Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+.$$

■